

[21-BA428-A/21-BS432-A]

AT THE END OF FOURTH SEMESTER -
(CBCS PATTERN)

DEGREE EXAMINATIONS

MATHEMATICS - IV(A) - REAL ANALYSIS

(UG PROGRAM (4 YEARS HONORS))

(COMMON FOR B.A., B.Sc)

(w.e.f. Admitted Batch 2020-21)

Time : 3 Hours

SECTION - A Maximum : 75 Marks

విభాగం - ఎ

Answer any Five questions. Each question carries
Five marks. (5×5=25)

ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు
ఐదు మార్కులు.

1. Prove that every convergent sequence is bounded.

ప్రతి అభిసరణ అనుక్రమము పరిబద్ధం అవుతుందని నిరూపించుము.

2. Test for convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$ యొక్క అభిసరణతను పరిశీలించండి.

3. Prove that $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ converges.

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ అభిసరిస్తుందని నిరూపించుము.

4. By ϵ, δ technique, prove that the function f defined by

$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0$ and $f(x) = 0, x = 0$ is continuous at $x = 0$.

$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0$ మరియు $f(x) = 0, x = 0$ అని

నిర్వచించిన, ϵ, δ టెక్నిక్ ద్వారా ప్రమేయం $f, x = 0$ దగ్గర అవిచ్ఛిన్నం అవుతుందని నిరూపించుము.

5. If $f : [a, b] \rightarrow R$ is derivable at $c \in [a, b]$, then prove that f is continuous at c .

$f : [a, b] \rightarrow R$ ప్రమేయం $c \in [a, b]$ వద్ద అవకలనీయము అయిన, f ప్రమేయం c వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అని చూపుము.

6. Discuss the applicability of Lagrange's mean value theorem for $f(x) = x(x-1)(x-2)$ on $\left[1, \frac{1}{2}\right]$.

$f(x) = x(x-1)(x-2)$ అనే ప్రమేయానికి $\left[1, \frac{1}{2}\right]$ పై, లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతం యొక్క అనువర్తనీయతను చర్చించండి.

7. Prove that, if $f: [a, b] \rightarrow R$ is continuous on $[a, b]$, then f is R - integrable on $[a, b]$.

$f: [a, b] \rightarrow R$ ప్రమేయం $[a, b]$ పై అవిచ్ఛిన్నమైన, $[a, b]$ పై R - సమాకలనీయమని నిరూపించుము.

8. If $f: [a, b] \rightarrow R$ is bounded function, then prove

$$\text{that } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x) dx.$$

$f: [a, b] \rightarrow R$ ప్రమేయం పరిబద్ధం అయిన,
 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x) dx$ అని చూపండి.

SECTION - B

విభాగం - బి

Answer ALL the questions. Each question carries Ten marks. (5×10=50)

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయండి. ప్రతి ప్రశ్నకు పది మార్కులు.

9. a) State and prove sandwich theorem.

సాండ్విచ్ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించుము.

(OR/లేదా)

b) Prove that the sequence $\{S_n\}$. defined by

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ is convergent.}$$

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ అయినప్పుడు, అనుక్రమము } \{S_n\}$$

అభిసరించునని నిరూపించుము.

10. a) Test for the convergence of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, 5, \dots, (2n-1)}{2, 4, 6, \dots, (2n)} x^{n-1} (x > 0).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1, 3, 5, \dots, (2n-1)}{2, 4, 6, \dots, (2n)} x^{n-1} (x > 0) \text{ యొక్క అభిసరణతను}$$

పరీక్షించండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove Cauchy's n^{th} root test.కొషీ n^{th} మూల పరీక్షను ప్రవచించి, నిరూపించుము.1. a) Obtain the points of discontinuity of the function f defined by $f(0) = 0$, $f(x) = \frac{1}{2} - x$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $f(x) = \left(\frac{3}{2} - x\right)$, $\frac{1}{2} < x < 1$ and $f(1) = 1$.

Examine the types of discontinuities.

$$f(0) = 0, \quad f(x) = \frac{1}{2} - x, \quad 0 < x < \frac{1}{2},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(x) = \left(\frac{3}{2} - x\right), \quad \frac{1}{2} < x < 1, \quad \text{మరియు}$$

$f(1) = 1$ అని నిర్వచించిన, f యొక్క విచ్ఛిన్నతా బిందువులను కనుగొని, విచ్ఛిన్నతా రకాలను పరీక్షించండి.

(OR/లేదా)

b) If $f : [a, b] \rightarrow R$ is continuous on $[a, b]$, then prove that f is bounded on $[a, b]$.

f అనే ప్రమేయం $[a, b]$ పై అవిచ్ఛిన్నమైతే, అది $[a, b]$ పై పరిబద్ధం అవుతుందని నిరూపించండి.

[Turn over

12. a) State and prove Rolle's theorem.

రోలే సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించుము.

(OR/లేదా)

b) Prove that $f(x) = x \left[\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} \right]$, if $x \neq 0$ and $f(0) = 0$ is

continuous at $x = 0$, but not derivable at $x = 0$.

$f(x) = x \left[\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} \right]$, $x \neq 0$ మరియు $f(0) = 0$ ప్రమేయం

$x = 0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నమవుతుందని, కాని అవకలనీయము కాదని నిరూపించండి.

13. a) Prove that $\frac{\pi^3}{24} \leq \int_0^\pi \frac{x^2}{5 + 3 \cos x} dx \leq \frac{\pi^3}{6}$.

$\frac{\pi^3}{24} \leq \int_0^\pi \frac{x^2}{5 + 3 \cos x} dx \leq \frac{\pi^3}{6}$ అని చూపండి.

(OR/లేదా)

(7) [21-BA428-A/21-BS432-A]

b) State and prove fundamental theorem on integral calculus.

సమాకలన గణితం యొక్క మూల సిద్ధాంతమును ప్రవచించి,
నిరూపించుము.
